Über die Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten unitärer Substitutionen.

Von GUSTAV RADOS in Budapest.

Seinem verehrten Freunde Leopold Fejér
zu seinem 60. Geburtstage gewidmet.

Zwischen den Koeffizienten einer unitären Substitution

$$y = a_{g1}x_1 + a_{g2}x_2 + \ldots + a_{gn}x_n$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen bekanntlich die $\frac{n(n+1)}{2}$ verschiedenen Bedingungsgleichungen

(B) $$a_{g1}\bar{a}_{h1} + a_{g2}\bar{a}_{h2} + \ldots + a_{gn}\bar{a}_{hn} = \delta_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n; g \leqq h)$$

in denen

$$\bar{a}_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

den konjugierten Wert von a_{gh} bedeutet und für das Kroneckersche Symbol δ_{gh} Null oder Eins zu setzen ist, je nachdem $g \neq h$ oder $g = h$ ist.

Die Bestimmung aller unitären Substitutionen erheischt demnach die Auflösung des Systems von Gleichungen (B), das n^2 Unbekannte, nämlich die Koeffizienten a_{gh} enthält und aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen besteht. Die Anzahl der Unbekannten übertrifft demnach die der Gleichungen um

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ehe man an die Auflösung eines Gleichungsystems herantritt, sind zwei Fragen zu klären: 1. widersprechen sich nicht etwa die Gleichungen des Systems; 2. wie groß ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Gleichungen des Systems?

Auf die Frage 1 ist die Antwort verneinend. Ist doch

$$a_{gh} = \delta_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Lösung des Systems (B).

Die Erledigung der Frage 2 erfordert eine eingehende Untersuchung, als deren Resultat sich der folgende Satz ergibt:

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten einer unitären Substitution sind voneinander unabhängig.

Erst der Nachweis dieses Satzes rechtfertigt die Behauptung, daß die Gruppe der n-dimensionalen unitären Transformationen im Lie's Sinne $\frac{n(n-1)}{2}$-gliedrig ist.

Die im System (B) vorkommenden Unbekannten a_{gh} sind komplexe Zahlen. Es sei

$$a_{gh} = a'_{gh} + a''_{gh} i \qquad (i = \sqrt{-1})$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n),$$

alsdann sind die Gleichungen von (B) ausführlich hingesetzt:

$$(a'_{g1} + a''_{g1} i)(a'_{h1} - a''_{h1} i) + \ldots + (a'_{gn} + a''_{gn} i)(a'_{hn} - a''_{hn} i) = \delta_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Darunter gibt es n solche, in denen $g = h$ ist, es sind dies

$$(\Phi_1) \qquad \varphi_g \equiv a'^2_{g1} + a''^2_{g1} + \ldots + a'^2_{gn} + a''^2_{gn} = 1$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\frac{n(n-1)}{2}$ solche, in denen $g \neq h$ ist; diese zerfallen in die nachfolgenden $n(n-1)$ Gleichungen:

$$(\Phi_2) \qquad \varphi'_{gh} \equiv a'_{g1} a'_{h1} + a''_{g1} a''_{h1} + \ldots + a'_{gn} a'_{hn} + a''_{gn} a''_{hn} = 0$$
$$(\Phi_3) \qquad \varphi''_{gh} \equiv a'_{h1} a''_{g1} - a'_{g1} a''_{h1} + \ldots + a'_{hn} a''_{gn} - a'_{gn} a''_{hn} = 0$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n; \quad g \lesseqgtr h).$$

Das durch Zusammenfassen der Gleichungen (Φ_1), (Φ_2), (Φ_3) entstehende System sei durch (Φ) bezeichnet; es enthält

$$n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

Gleichungen und die $2n^2$ Unbekannten:

$$a'_{gh},\ a''_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Das Gleichungsystem (Φ) ist offenbar mit dem System (B) äquivalent. Sind demnach die Gleichungen von (B) voneinander abhängig, so sind es auch diejenigen von (Φ). Kann man daher den Nachweis für die Unabhängigkeit der Gleichungen von (Φ) führen, so ist damit auch die Unabhängigkeit der Gleichungen von (B) erwiesen. Die Gleichungen von (Φ) sind sicherlich voneinander unabhängig, wenn die aus den Spalten der der Funktionalmatrix

$$M = \left\| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varphi'_{12}, \varphi'_{13}, \ldots, \varphi'_{n-1,n}; \varphi''_{12}, \varphi''_{13}, \ldots, \varphi''_{n-1,n})}{\partial(a'_{11}, a''_{11}, a'_{12}, a''_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a'_{nn}, a''_{nn})} \right\|$$

gebildeten Determinanten von Grade n^2 nicht sämmtlich verschwinden. Die Anzahl dieser Determinanten ist

$$\binom{2n^2}{n^2} = \frac{2n^2(2n^2-1)\ldots(n^2+1)}{1\,.\,2\ldots n^2}.$$

Es wäre schwierig das Verschwinden oder Nichtverschwinden jeder einzelnen dieser Determinanten nachzuweisen; da jedoch die Elemente dieser Determinanten und mithin auch sie selbst reelle Zahlen sind, genügt es zu beweisen, daß ihre Quadratsumme von Null verschieden ist. Diese Quadratsumme D ergibt sich zufolge des verallgemeinerten Multiplikationssatzes der Determinanten von CAUCHY—BINET als eine Determinante von Grade n^2, deren Elemente die inneren Produkte der Zeilen von M sind. Die Auswertung von D führt zu dem Resultat

$$D = 2^{n(n+1)} \neq 0$$

so daß damit die Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen erwiesen ist.

Durch die Einführung zweckentsprechender Bezeichnungen kann die Berechnung von D übersichtlich gestaltet werden. Wir führen die nachfolgenden $2n+1$ Vektoren von je $2n$ Koordinaten ein:

$$A'_g = (a'_{g1}, a''_{g1}, a'_{g2}, a''_{g2}, \ldots, a'_{gn}, a''_{gn})$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$
$$A''_h = (-a''_{h1}, a'_{h1}, -a''_{h2}, a'_{h2}, \ldots, -a''_{nh}, a'_{nh})$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$
$$O = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$

Zwischen diesen bestehen die folgenden Relationen:

$$(\mathrm{e}_1)\quad \begin{cases} (A'_g, O) = a'_{g1}.0 + a''_{g1}.0 + \ldots + a'_{gn}.0 + a''_{gn}.0 = 0 \\ \qquad (g = 1, 2, \ldots, n) \\ (A''_{g1}, O) = -a''_{h1}.0 + a'_{h1}.0 + \ldots - a''_{hn}.0 + a'_{hn}.0 = 0 \\ \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$$(\mathrm{e}_2)\quad \begin{cases} (A'_g, A''_g) = a'^2_{g1} + a''^2_{g1} + \ldots + a'^2_{gn} + a''^2_{gn} = \varphi_g = 1 \\ \qquad (g = 1, 2, \ldots, n) \\ (A''_h, A''_h) = a'^2_{h1} + a''^2_{h1} + \ldots + a'^2_{hn} + a''^2_{hn} = \varphi_h = 1 \\ \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$$(\mathrm{e}_3)\quad (A'_g, A''_g) = -a'_{g1}a''_{g1} + a'_{g1}a''_{g1} - \ldots - a'_{gn}a''_{gn} + a'_{gn}a''_{gn} = 0 \quad (g = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\mathrm{e}_4)\quad (A'_g, A'_h) = a'_{g1}a'_{h1} + a''_{g1}a''_{h1} + \ldots + a'_{gn}a'_{hn} + a''_{gn}a''_{hn} = \varphi'_{gh} = 0 \quad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\mathrm{e}_5)\quad (A''_g, A''_h) = a''_{g1}a''_{h1} + a'_{g1}a'_{h1} + \ldots + a''_{gn}a''_{hn} + a'_{gn}a'_{hn} = \varphi'_{gh} = 0 \quad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\mathrm{e}_6)\quad (A'_g, A''_h) = -a'_{g1}a''_{h1} + a''_{g1}a'_{h1} - \ldots - a'_{gn}a''_{hn} + a''_{gn}a'_{hn} = \varphi''_{gh} = 0 \quad (g, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Quadratsumme der aus den Spalten der Matrix M sich ergebenden Determinanten von Grade n^2 kann in Anbetracht der Relationen (e_1), (e_2), (e_3), (e_4), (e_5), (e_6) auf die folgende Form gebracht werden:

$$D = \left\| \begin{matrix} 4 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 4 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 4 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\}(n) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\}n(n-1) \end{matrix}$$

Der Wert derselben ist

$$D = 4^n\, 2^{n(n-1)} = 2^{n(n+1)},$$

daher von Null verschieden und somit ist der Satz von der Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen (B) bewiesen.

Die reellen orthogonalen Substitutionen sind bekanntlich unitär (die nicht-reellen sind es nicht), so daß die unitären Substitutionen als Verallgemeinerung der orthogonalen betrachtet werden. Bemerkenswert ist nun die Tatsache, daß die im komplexen Gebiet

n-dimensionalen unitären Substitutionen ihrem Wesen nach $2n$-dimensionale reelle orthogonale Substitutionen sind. Ist nämlich

$$\text{(U)} \quad y'_g + y''_g i = (a'_{g1} + a''_{g1} i)(x'_1 + x''_1 i) + \ldots + (a'_{gn} + a''_{gn} i)(x'_n + x''_n i)$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

die unitäre Substitution, so zerfällt diese in die nachfolgende $2n$-dimensionale reelle Substitution:

$$\text{(O)} \quad \begin{aligned} y'_g &= a'_{g1}x'_1 - a''_{g1}x''_1 + a'_{g2}x'_2 - a''_{g2}x''_2 + \ldots + a'_{gn}x'_n - a''_{gn}x''_n \\ y''_g &= a''_{g1}x'_1 + a'_{g1}x''_1 + a''_{g2}x'_2 + a'_{g2}x''_2 + \ldots + a''_{gn}x'_n + a'_{gn}x''_n, \end{aligned}$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

deren Koeffizientensystem durch die Vektoren

$$-A''_1,\ A'_1,\ -A''_2,\ A'_2,\ \ldots,\ -A''_n,\ A'_n$$

gegeben sind. Infolge der Relationen (e_2) sind

$$(A'_g, A'_g) = (A''_g, A''_g) = 1$$

und ferner nach (e_3), (e_4), (e_5), (e_6) sind

$$(A'_g, A''_g) = (A'_g, A'_h) = (A''_g, A''_h) = (A'_g, A''_h) = 0 \quad (g \neq h).$$

Es sind somit alle Bedingungen erfüllt, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß (O) eine orthogonale Substitution sei.

Budapest, den 14. Oktober 1939.

(Eingegangen am 11. November 1939)